

49 48 47 46 45 45 44 43 42 41 40
39 38 37 36 35 34 33 32

34 33 32 31 30 29 28 27 26 25 24
20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10
3 2 1

翰林 109 指考

精彩 解析

ONE HUNDRED
AND NINE

59 58 57 56 55 54
55 54 53 52 51 50

數學 考科

忠明高中 陳冠州 老師

依據大考中心公布內容

【試題・答案】

總召集 / 陳彥良
總編輯 / 李心筠
主 編 / 吳崇欽
責 編 / 李遠涵
美 編 / 林婷慧・方淑莉
◎ 本書內容同步刊載於翰林官網

出 版 / 民國一〇九年七月
發行所 / 70248 臺南市新樂路 76 號
編輯部 / 70252 臺南市新忠路 8-1 號
電 話 / (06) 2619621 #312
E-mail / periodical@hanlin.com.tw
翰林官網 <https://www.hle.com.tw>



00843-23

翰 林 出 版

試題分析

ONE HUNDRED AND NINE >>

數學甲

忠明高中 / 陳冠州老師

一 回顧與歷屆試題分析

首先我們先回顧一下，102 年指定科目考試是第一次依 99 課綱命題，至 108 年指考各章命題分數統計如下：

範圍	102 年	103 年	104 年	105 年	106 年	107 年	108 年
數與式	0	0	0	0	0	0	0
多項式函數	14	2	8	6	0	0	0
指數與對數函數	6	6	6	6	6	8	12
機 率	6	6	8	7	6	6	8
三 角	0	14	11	0	0	6	6
直線與圓	6	6	8	4	7	6	8
平面向量	0	0	8	11	8	6	8
空間向量	14	22	6	◎7	6	◎8	2
空間中的平面與直線	◎8	0	0	8	7	12	10
矩 陣	◎12	◎12	◎6	◎8	◎12	6	◎6
機率統計	6	8	6	7	7	6	6
三角函數	8	0	6	13	14	8	6
極限與函數	8	6	13	8	7	8	8
多項式函數的微積分	12	18	14	15	20	20	20

◎：表第四冊中雙圈內容（此部分為指考範圍，不在學測範圍）

由以上各章命題分數，分析數點歸納如下：

- 除了數與式、多項式函數這兩章外，幾乎每章每年都會被命題。
- 雙圈◎雖不為學測範圍，但指考每年必考，尤其是矩陣中的線性變換：旋轉矩陣、鏡射矩陣。指考中雙圈◎配分少則 6 分，多則 20 分，建議程度好的學子在高二學習雙圈◎範圍時，也應認真念，以免面對指考時此部分失分，無法獲高分。
- 六冊中以選修數學甲（下）配分最重，約占四分之一。偏偏此時很多學子為了準備個人申請入學第二階段，而忽略此冊，故建議學子仍要分配時間認真學習，不宜偏頗，以免若真要面對指定科目考試時，準備不足！

4. 若以數學領域分類，以微積分兩章（極限與函數、多項式函數的微積分）每年配分最多，接著向量三章（平面向量、空間向量、空間中的平面與直線）合計配分居次。
5. 近年來出題，著重圖形及重要觀念應用，愛用數學專業用語描述問題（這點跟學測不同），計算量較以前減少。基本型題目在課本都可找到類似題，先弄懂課本題目就有基本分。非選擇題每年考兩題，用小題引導解題，第(1)小題都是出自課本重要題目，著重概念性及程序性知識，建議學子務必把握；非選擇題第二題每年大都出自多項式函數的微積分，可見命題教授看重微積分，此也為大學微積分課程鋪路。

二 109 指定科目考試數學甲試題分析

大考中心所列指定科目考試測驗六目標：概念性知識、程序性知識、閱讀與表達的能力、連結能力、論證推理的能力、解決問題的能力，109 指定科目考試數學甲占六目標比率依次為 6 %、18 %、6 %、6 %、20 %、44 %，主要測驗高層次目標：解決問題的能力，占了整份試卷的 44 %，跟以往比較稍高，預估本年數學甲是這十年來最難的！！

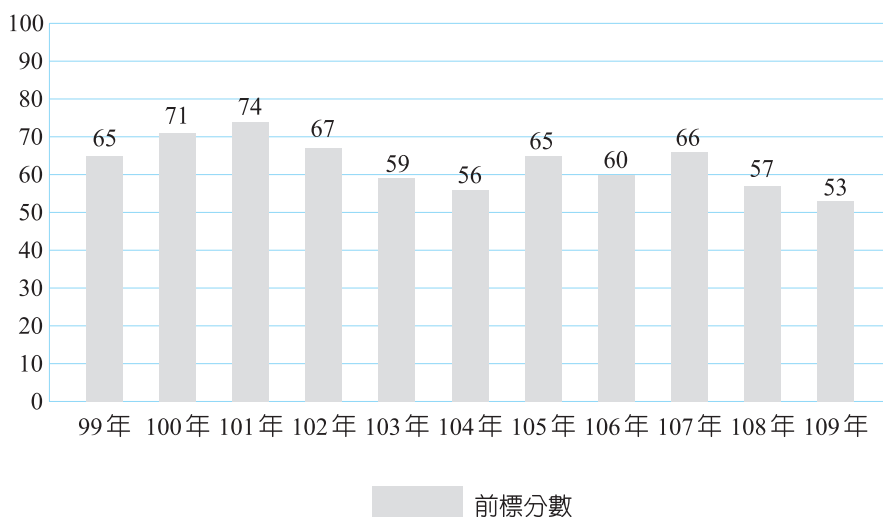
109 數學甲試題分配章節表	
範圍	類型
數與式	—
多項式函數	—
指數與對數函數	單選 3
機 率	—
三 角	單選 1、選填 C
直線與圓	—
平面向量	多選 4、選填 B
空間向量	非選二
空間中的平面與直線	選填 A、非選二
矩 陣	◎多選 8
機率統計	單選 2
三角函數	單選 1、多選 7
極限與函數	多選 5
多項式函數的微積分	多選 6、非選一

由上表試題分配章節表可知：

1. 配題：試題大部分在高二或高三數學，其中以多項式函數的微積分命題 20 分最多，雙圈◎命題 8 分，但高一數學僅命題 6 分。若以數學領域分析，向量三章（平面向量、空間向量、空間中的平面與直線）考 32 分最多，微積分兩章（極限與函數、多項式函數的微積分）考 28 分次之。比較意外的是數學甲全為純數學題目，這跟大考中心一直推動的素養與跨領域的精神有偏差，所以明年應該要有素養題出現才對。
2. 難易度：中間偏難，與去年比較難度略增。計算量大的題目，如選填 C、非選二，若無採用到好的解題策略，計算量就會偏大。預估各標略降為頂標 65 分、前標 53 分、均標 39 分、後標 25 分、底標 18 分，請同學參考。
3. 新特色：數學甲微積分考題很像大學微積分，如多選 5 考高斯符號與極限，這是大學微積分的常考題；多選 6 考微積分觀念的對錯判別，跟以往著重計算方向不同，很多學子不習慣！所以提醒學子微積分（即數學甲下全部）不能再只會算就好，管它為什麼，還是要知道公式、觀念弄清楚，最好方式就是會證明公式，至少要看的懂，否則再遇到類似題，還是不會！

三 110 指定科目考試數學甲展望

數學甲前標分數



（註：109 年為預估值）

從上圖走勢觀察發現近八年的前標在 60 分上下震盪，表示題目難易度尚穩定，預估明年指考依舊維持近年的難易度，微積分仍是命題最多分處，但今年沒有出現的素養題要多加注意，所以學子要關心一下時事了！



試題解析

ONE HUNDRED AND NINE >>

數學甲

忠明高中 / 陳冠州老師

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 已知 $45^\circ < \theta < 50^\circ$ ，且設 $a = 1 - \cos^2 \theta$ 、 $b = \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta$ 、 $c = \frac{\tan \theta}{\tan^2 \theta + 1}$ 。關

於 a, b, c 三個數值的大小，試選出正確的選項。

- (1) $a < b < c$
- (2) $a < c < b$
- (3) $b < a < c$
- (4) $b < c < a$
- (5) $c < a < b$

答案 (5)

命題出處 第三冊第一章 三角、選修數學甲（上）第二章 三角函數

測驗目標 三角函數比大小

難易度 中偏易

詳解 $a = 1 - \cos^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{1}$

$$b = \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$$

$$c = \frac{\tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} = \frac{\tan \theta}{\sec^2 \theta} = \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\left(\frac{1}{\cos \theta}\right)^2} \quad (\text{分子，分母同乘 } \sin \theta \cos \theta)$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$\because 45^\circ < \theta < 50^\circ \quad \therefore 0 < \cos \theta < \sin \theta < 1$$

$$a, b, c \text{ 分母大小為 } \cos \theta < 1 < \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \text{ 得 } b > a > c$$

故選(5)

試題解析

2. 有 A, B 兩個箱子，其中 A 箱有 6 顆白球與 4 顆紅球， B 箱有 8 顆白球與 2 顆藍球。現有三種抽獎方式（各箱中每顆球被抽取的機率相同）：

（一）先在 A 箱中抽取一球，若抽中紅球則停止，若抽到白球則再從 B 箱中抽取一球；

（二）先在 B 箱中抽取一球，若抽中藍球則停止，若抽到白球則再從 A 箱中抽取一球；

（三）同時分別在 A, B 箱中各抽取一球。

給獎方式為：在紅、藍這兩種色球當中，若只抽到紅球得 50 元獎金；若只抽到藍球得 100 元獎金；若兩種色球都抽到，則仍只得 100 元獎金；若都沒抽到，則無獎金。將上列（一）、（二）、（三）這 3 種抽獎方式所得獎金的期望值分別記為 E_1, E_2, E_3 ，試選出正確的選項。

(1) $E_1 > E_2 > E_3$

(2) $E_1 = E_2 > E_3$

(3) $E_2 = E_3 > E_1$

(4) $E_1 = E_3 > E_2$

(5) $E_3 > E_2 > E_1$

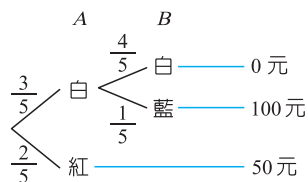
答案 (3)

命題出處 選修數學甲（上）第一章 機率統計

測驗目標 期望值

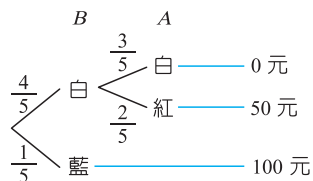
難易度 中偏易

詳解 (一)



$$E_1 = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times 100 + \frac{2}{5} \times 50 = 32 \text{ (元)}$$

(二)



$$E_2 = \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} \times 50 + \frac{1}{5} \times 100 = 36 \text{ (元)}$$

$$\begin{aligned} \text{(三)} \quad E_3 &= \underbrace{\frac{3}{5}}_{A \text{ 白}} \times \underbrace{\frac{4}{5}}_{B \text{ 白}} \times 0 + \underbrace{\frac{3}{5}}_{A \text{ 白}} \times \underbrace{\frac{1}{5}}_{B \text{ 藍}} \times 100 + \underbrace{\frac{2}{5}}_{A \text{ 紅}} \times \underbrace{\frac{4}{5}}_{B \text{ 白}} \times 50 + \underbrace{\frac{2}{5}}_{A \text{ 紅}} \times \underbrace{\frac{1}{5}}_{B \text{ 藍}} \times 100 \\ &= 36 \text{ (元)} \end{aligned}$$

由（一）、（二）、（三）可知 $E_2 = E_3 > E_1$

故選(3)

3. 根據實驗統計，某種細菌繁殖，其數量平均每 3.5 小時會擴增為 2.4 倍。假設實驗室的試管一開始有此種細菌 1000 隻，根據指數函數模型，試問大約在多少小時後此種細菌的數量會到達 4×10^{10} 隻左右？（註： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ）
- (1) 63 小時
 (2) 70 小時
 (3) 77 小時
 (4) 84 小時
 (5) 91 小時

答案 (2)

命題出處 第一冊第三章 指數與對數函數

測驗目標 指、對數的應用—成長率

難易度 易

詳解 設 t 小時後到達 4×10^{10} 隻

$$\therefore 1000 \times (2.4)^{\frac{t}{3.5}} = 4 \times 10^{10} \Rightarrow (2.4)^{\frac{t}{3.5}} = 4 \times 10^7$$

$$\text{等號兩邊取 } \log \text{ 得 } \frac{t}{3.5} \log 2.4 = 7 + \log 4 \cdots \cdots (*)$$

$$\begin{aligned} \log 2.4 &= \log \frac{2^3 \times 3}{10} \\ &= 3 \log 2 + \log 3 - \log 10 \\ &\approx 3 \times 0.301 + 0.4771 - 1 \\ &= 0.3801 \end{aligned}$$

$$\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2 \approx 2 \times 0.301 = 0.602$$

$$\text{代回 } (*) \text{ 得 } \frac{t}{3.5} \times 0.3801 \approx 7 + 0.602$$

$$\Rightarrow t \approx \frac{7.602}{0.3801} \times 3.5 = 20 \times 3.5 = 70 (\text{小時})$$

故選(2)

二、多選題 (占 40 分)

說明：第 4 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 在坐標平面上，設 O 為原點，且 A 、 B 為異於 O 的相異兩點。令 C_1, C_2, C_3 為平面上三個點，且滿足 $\overrightarrow{OC_n} = \overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$, $n=1, 2, 3$ ，試選出正確的選項。

- (1) $\overrightarrow{OC_1} \neq \vec{0}$
- (2) $\overrightarrow{OC_1} < \overrightarrow{OC_2} < \overrightarrow{OC_3}$
- (3) $\overrightarrow{OC_1} \cdot \overrightarrow{OA} < \overrightarrow{OC_2} \cdot \overrightarrow{OA} < \overrightarrow{OC_3} \cdot \overrightarrow{OA}$
- (4) $\overrightarrow{OC_1} \cdot \overrightarrow{OB} < \overrightarrow{OC_2} \cdot \overrightarrow{OB} < \overrightarrow{OC_3} \cdot \overrightarrow{OB}$
- (5) C_1, C_2, C_3 在同一直線上

答案 (4)(5)

命題出處 第三冊第三章 平面向量

測驗目標 向量的定義、內積

難易度 中

詳解 (1) $\times$ ：分析：當 $\overrightarrow{OC_1} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}$

反例：當 $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}$ 時， $\overrightarrow{OC_1} = \vec{0}$

(2) $\times$ ：反例：當 $\overrightarrow{OA} = -3\overrightarrow{OB}$ 時，

$$\overrightarrow{OC_n} = \overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} = -3\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OB} = (n-3)\overrightarrow{OB}$$

$$|\overrightarrow{OC_n}| = |\overrightarrow{OC_n}| = |n-3| |\overrightarrow{OB}|$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OC_1} = 2\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC_3} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OC_1} > \overrightarrow{OC_2} > \overrightarrow{OC_3}$$

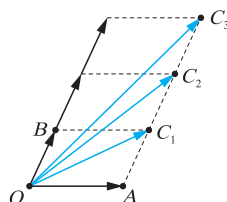
(3) $\times$ ： $\overrightarrow{OC_n} \cdot \overrightarrow{OA} = (\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}|^2 + n\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}$

若 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}$ 為負時， $\overrightarrow{OC_1} \cdot \overrightarrow{OA} > \overrightarrow{OC_2} \cdot \overrightarrow{OA} > \overrightarrow{OC_3} \cdot \overrightarrow{OA}$

(4) $\bigcirc$ ： $\overrightarrow{OC_n} \cdot \overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + n|\overrightarrow{OB}|^2$

$\because |\overrightarrow{OB}|^2$ 必為正 $\therefore \overrightarrow{OC_1} \cdot \overrightarrow{OB} < \overrightarrow{OC_2} \cdot \overrightarrow{OB} < \overrightarrow{OC_3} \cdot \overrightarrow{OB}$

(5) $\bigcirc$ ：由平面向量的線性組合及下圖可知， C_1, C_2, C_3 在同一直線上



故選(4)(5)

5. 對一實數 a ，以 $[a]$ 表示不大於 a 的最大整數，例如： $[1.2] = [\sqrt{2}] = 1$ ， $[-1.2] = -2$ 。考慮無理數 $\theta = \sqrt{10001}$ ，試選出正確的選項。

- (1) $a-1 < [a] \leq a$ 對任意實數 a 均成立 (2) 數列 $b_n = \frac{[n\theta]}{n}$ 發散， n 為正整數
- (3) 數列 $c_n = \frac{[-n\theta]}{n}$ 發散， n 為正整數 (4) 數列 $d_n = n \left[\frac{\theta}{n} \right]$ 發散， n 為正整數
- (5) 數列 $e_n = n \left[\frac{-\theta}{n} \right]$ 發散， n 為正整數

答案 (1)(5)

命題出處 選修數學甲（下）第一章 極限與函數

測驗目標 無窮數列的極限、夾擠定理

難易度 難

詳解 (1) ○：由定義得知正確

(2) ×：由(1)知： $n\theta - 1 < [n\theta] \leq n\theta$

$$\text{除以 } n \Rightarrow \theta - \frac{1}{n} < \frac{[n\theta]}{n} \leq \theta$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\theta - \frac{1}{n} \right) = \theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta$$

$\therefore$ 由夾擠定理知： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n\theta]}{n} = \theta$ ，即數列 b_n 收斂

(3) ×：由(1)知： $-n\theta - 1 < [-n\theta] \leq -n\theta$

$$\text{除以 } n \Rightarrow -\theta - \frac{1}{n} < \frac{[-n\theta]}{n} \leq -\theta$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\theta - \frac{1}{n} \right) = -\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\theta)$$

$\therefore$ 由夾擠定理知： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[-n\theta]}{n} = -\theta$ ，即數列 c_n 收斂

(4) ×：當 n 很大時， $n \left[\frac{\theta}{n} \right] = n[0.\times\times\dots] = n \cdot 0 = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{\theta}{n} \right] = 0，\text{即數列 } d_n \text{ 收斂}$$

(5) ○：當 n 很大時， $n \left[\frac{-\theta}{n} \right] = n[-0.\times\times\dots] = n \cdot (-1) = -n$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{-\theta}{n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) \text{ 不存在，即數列 } e_n \text{ 發散}$$

故選(1)(5)

6. 設 $F(x)$ 、 $f(x)$ 皆為實係數多項式函數。已知 $F'(x)=f(x)$ ，試選出正確的選項。

- (1) 若 $a \geq 0$ ，則 $F(a) - F(0) = \int_0^a f(t) dt$
- (2) 若 $F(x)$ 除以 x 的商式為 $Q(x)$ ，則 $Q(0) = f(0)$
- (3) 若 $f(x)$ 可被 $x+1$ 整除，則 $F(x) - F(0)$ 可被 $(x+1)^2$ 整除
- (4) 若對所有實數 x ， $F(x) \geq \frac{x^2}{2}$ 都成立，則對所有實數 x ， $f(x) \geq x$ 也都成立
- (5) 若對所有 $x > 0$ ， $f(x) \geq x$ 都成立，則對所有 $x > 0$ ， $F(x) \geq \frac{x^2}{2}$ 也都成立

答案 (1)(2)

命題出處 選修數學甲（下）第二章 多項式函數的微積分

測驗目標 微分公式、微積分基本定理

難易度 難

詳解 (1) ○：由微積分基本定理知此式成立

(2) ○：∵ $F(x)$ 除以 x 的商式為 $Q(x)$ ，餘式為 $F(0)$

$$\therefore F(x) = x \cdot Q(x) + F(0)$$

$$\text{等號兩邊各別微分} \Rightarrow F'(x) = 1 \cdot Q(x) + x \cdot Q'(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = Q(x) + x \cdot Q'(x)$$

$$\text{令 } x=0 \text{ 代入} \Rightarrow f(0) = Q(0)$$

(3) ×：反例：取 $f(x) = x+1$ ， $F(x) = \frac{x^2}{2} + x$

$$\Rightarrow f(x) \text{ 可被 } x+1 \text{ 整除，}$$

$$\text{但 } F(x) - F(0) = \frac{x^2}{2} + x \text{ 無法被 } (x+1)^2 \text{ 整除}$$

(4) ×：反例：取 $F(x) = x^4 + \frac{x^2}{2} \Rightarrow f(x) = F'(x) = 4x^3 + x$

$$\Rightarrow F(x) \geq \frac{x^2}{2} \text{ 恆成立，}$$

$$\text{但 } f(x) = 4x^3 + x \geq x \text{ 不恆成立}$$

（例如： $x = -1$ 時，就不成立）

(5) ×：反例：取 $f(x) = x$ ， $F(x) = \frac{x^2}{2} - 1$

$$\Rightarrow f(x) \geq x \text{ 恆成立，但 } F(x) = \frac{x^2}{2} - 1 \geq \frac{x^2}{2} \text{ 不成立}$$

故選(1)(2)

7. 在複數平面上，設 O 為原點，且 A 、 B 分別表示坐標為複數 z 、 $z+1$ 的點。已知點 A 、點 B 都在以 O 為圓心的單位圓上，試選出正確的選項。

- (1) 直線 AB 與實數軸平行
- (2) $\triangle OAB$ 為直角三角形
- (3) 點 A 在第二象限
- (4) $z^3 = 1$
- (5) 坐標為 $1 + \frac{1}{z}$ 的點也在同一單位圓上

答案 (1)(4)(5)

命題出處 選修數學甲（上）第二章 三角函數

測驗目標 複數平面、複數的極式及其乘、除法

難易度 中

詳解 依題意可在單位圓上找到 2 組 A 、 B

令其為 (A_1, B_1) 、 (A_2, B_2) ，如右圖

(1) $\bigcirc$ ： $\because$ 點 A 向右平移 1 單位得到點 B

$\therefore \overrightarrow{AB} \parallel$ 實數軸

(2) $\times$ ： $\because \overline{OA} = \overline{OB} = 1 = \overline{AB}$

$\therefore \triangle OAB$ 為正三角形

(3) $\times$ ：點 A 在第二或第三象限

(4) $\bigcirc$ ：先說明 $z_1^3 = 1$ ，相同方法亦可說明 $z_2^3 = 1$ ：

z_1 的主幅角 $= \angle A_1OC$

$= \angle A_1OB_1 + \angle B_1OC$

$= \angle 60^\circ + \angle A_1B_1O$ ($\because$ 內錯角相等)

$= 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

又 $|z_1| = 1 \therefore z_1 = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$

$\therefore z_1^3 = \cos 360^\circ + i \sin 360^\circ = 1$

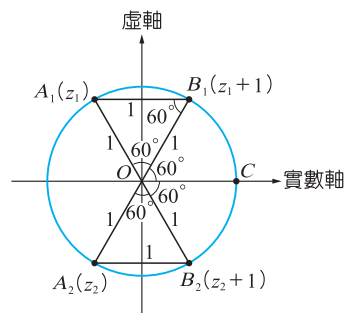
(5) $\bigcirc$ ：先說明 $z = z_1$ 時選項成立，相同方法亦可說明 $z = z_2$ 時成立：

$$\frac{1}{z_1} = \frac{\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ}{\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ}$$

$$= \cos(-120^\circ) + i \sin(-120^\circ) = z_2$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{z_1} = 1 + z_2, \text{ 即 } B_2 \text{ 點, 在單位圓上}$$

故選(1)(4)(5)



8. 設二階實係數方陣 A 代表坐標平面的一個鏡射變換且滿足 $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ；另設二階實係數方陣 B 代表坐標平面的一個（以原點為中心的）旋轉變換且滿足 $B^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ，試選出正確的選項。
- (1) A 恰有三種可能 (2) B 恰有三種可能 (3) $AB=BA$
- (4) 二階方陣 AB 代表坐標平面的一個旋轉變換 (5) $BABA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

答案 (2)(5)

命題出處 第四冊第三章 矩陣

測驗目標 旋轉矩陣、鏡射矩陣

難易度 難

詳解 (1) $\times$ ： $\because A$ 為鏡射矩陣 $\therefore A^2 = I$

兩邊同乘 $A \Rightarrow A^3 = A \therefore A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ，只有 1 種

(2) $\bigcirc$ ：設 $B = R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ， $0 \leq \theta < 360^\circ$ ， $B^3 = R_{(3\theta)}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix} \\ = R_{180^\circ} = R_{(180^\circ + 360^\circ \times n)}, n \text{ 為整數}$$

$$\therefore B^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \therefore 3\theta = 180^\circ + 360^\circ \times n$$

$$\Rightarrow \theta = 60^\circ + 120^\circ \times n = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ \text{ (取 } 0 \leq \theta < 360^\circ \text{)}$$

$\therefore B = R_{60^\circ}, R_{180^\circ}, R_{300^\circ}$ 有 3 種

(3) $\times$ ： $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$

$$BA = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix}$$

$\therefore AB \neq BA$

(4) $\times$ ： $AB = \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(270^\circ - \theta) & \sin(270^\circ - \theta) \\ \sin(270^\circ - \theta) & -\cos(270^\circ - \theta) \end{bmatrix}$

為鏡射矩陣，非旋轉矩陣

〈另解〉

$\therefore$ 旋轉矩陣與鏡射矩陣之積為鏡射矩陣

$\therefore AB, BA$ 均為鏡射矩陣

(5) $\bigcirc$ ： $BABA = (BA)(BA) = I$ ($\because$ 鏡射矩陣的平方為單位方陣)

故選(2)(5)

三、選填題 (占 18 分)

說明：1. 第 A. 至 C. 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（9～19）。

2. 每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 在坐標空間中，設 O 為原點，且點 P 為三平面 $x-3y-5z=0$ 、 $x-3y+2z=0$ 、 $x+y=t$ 的交點，其中 $t>0$ 。若 $\overline{OP}=10$ ，則 $t=$ $9\sqrt{10}$ 。（化成最簡根式）

答案 $4\sqrt{10}$

命題出處 第四冊第二章 空間中的平面與直線

測驗目標 三元一次聯立方程式

難易度 易

詳解
$$\begin{cases} x-3y-5z=0 & \cdots \text{①} \\ x-3y+2z=0 & \cdots \text{②} \\ x+y=t & \cdots \text{③} \end{cases}$$

$$\frac{\text{②}-\text{①}}{7} \Rightarrow z=0, \text{代回①} \Rightarrow x-3y=0$$

$$\text{再與③聯立，得 } x=\frac{3}{4}t, y=\frac{t}{4} \therefore P(x, y, z)=\left(\frac{3}{4}t, \frac{t}{4}, 0\right)$$

$$\text{因為 } \overline{OP}^2=10^2, \text{所以 } \left(\frac{3}{4}t\right)^2+\left(\frac{t}{4}\right)^2+0^2=100$$

$$\Rightarrow \frac{10}{16}t^2=100 \Rightarrow t^2=160 \Rightarrow t=\pm 4\sqrt{10} \quad (\text{負不合 } \because t>0)$$

- B. 考慮坐標平面上相異三點 A 、 B 、 C ，其中點 A 為 $(1, 1)$ 。分別以線段 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 為直徑作圓，此兩圓交於點 A 及點 $P(4, 2)$ 。已知 $\overline{PB}=3\sqrt{10}$ 且點 B 在第四象限，則點 B 的坐標為 $(12, 13)$ 。

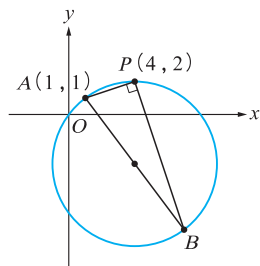
答案 $(7, -7)$

命題出處 第三冊第三章 平面向量

測驗目標 向量的定義

難易度 易

詳解
$$\begin{aligned} \because \overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{AP} &= (3, 1) \\ \therefore \overrightarrow{PB} &\parallel (1, -3) \\ \text{又 } |\overrightarrow{PB}| &= 3\sqrt{10}, |(1, -3)| = \sqrt{10} \\ \therefore \overrightarrow{PB} &= 3(1, -3) = (3, -9) \\ \text{故點 } B &\text{ 坐標為 } (4, 2) + (3, -9) = (7, -7) \end{aligned}$$



試題解析

〈另解〉

$$\because \angle APE + \angle BPD = \angle BPD + \angle PBD (=90^\circ)$$

$$\therefore \angle APE = \angle PBD$$

$$\text{又 } \angle PEA = \angle PDB = 90^\circ$$

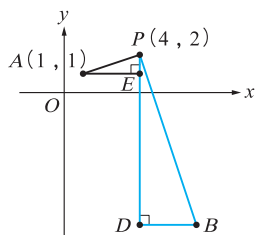
$$\therefore \triangle EPA \sim \triangle DBP \text{ (AA 相似)}$$

$$\overline{PA} = \sqrt{(4-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$\therefore \overline{PA} : \overline{PB} = \sqrt{10} : 3\sqrt{10} = 1 : 3 \text{ 且 } \overline{AE} = 3, \overline{PE} = 1$$

$$\therefore \overline{PD} = 3 \times 3 = 9, \overline{BD} = 1 \times 3 = 3$$

$$\therefore \text{點 } B \text{ 坐標為 } (4+3, 2-9) = (7, -7)$$



- C. 有一個三角形公園，其三頂點為 O 、 A 、 B ，在頂點 O 處有一座 150 公尺高的觀景臺，某人站在觀景臺上觀測地面上另兩個頂點 A 、 B 與 $\overline{AB}$ 的中點 C ，測得其俯角分別為 30° 、 60° 、 45° 。則此三角形公園的面積為 15 16 17 18 $\sqrt{19}$ 平方公尺。（化成最簡根式）

答案 7500 $\sqrt{2}$

命題出處 第三冊第一章 三角

測驗目標 立體測量

難易度 中

詳解 (1) 令觀景臺的位置為 H ，且 $\overline{OH} = 150$

$$\because P \text{ 測出 } Q \text{ 的俯角為 } \theta \Leftrightarrow Q \text{ 測出 } P \text{ 的仰角為 } \theta$$

$$\therefore \angle HAO = 30^\circ, \angle HBO = 60^\circ, \angle HCO = 45^\circ$$

$$\text{在直角 } \triangle AOH \text{ 中, } \overline{AO} = 150 \times \sqrt{3} = 150\sqrt{3}$$

$$\text{在直角 } \triangle COH \text{ 中, } \overline{CO} = \overline{OH} = 150$$

$$\text{在直角 } \triangle BOH \text{ 中, } \overline{BO} = \frac{150}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{3}$$

(2) 作 $\overline{CO'} = \overline{CO} = 150 \Rightarrow OAO'B$ 為平行四邊形

$$\therefore \triangle AOB = \triangle AOO'$$

(3) 利用海龍公式計算 $\triangle AOO'$ 面積：

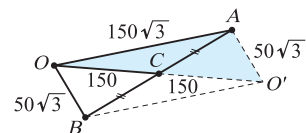
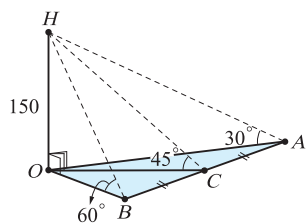
$$s = (150\sqrt{3} + 50\sqrt{3} + 150 \times 2) \div 2 = 100\sqrt{3} + 150$$

$$\triangle AOO' \text{ 面積為}$$

$$\sqrt{(100\sqrt{3} + 150)(100\sqrt{3} - 150)(50\sqrt{3} + 150)(-50\sqrt{3} + 150)}$$

$$= 7500\sqrt{2} = \triangle AOB \text{ 面積}$$

故三角形公園的面積為 7500 $\sqrt{2}$ 平方公尺



〈另解〉

(1) 令觀景臺的位置為 H ，且 $\overline{OH}=150=h$

$\therefore P$ 測出 Q 的俯角為 $\theta \Leftrightarrow Q$ 測出 P 的仰角為 θ

$\therefore \angle HAO=30^\circ, \angle HBO=60^\circ, \angle HCO=45^\circ$

在直角 $\triangle AOH$ 中， $\overline{AO}=\sqrt{3}h$ ，在直角 $\triangle COH$ 中， $\overline{CO}=h$

在直角 $\triangle BOH$ 中， $\overline{BO}=\frac{h}{\sqrt{3}}$

(2) 在 $\triangle AOB$ 中，設 $\overline{AC}=\overline{BC}=x$

由中線定理知： $(\sqrt{3}h)^2 + \left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 = 2(h^2 + x^2)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{3}h \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{2\sqrt{6}}{3}h$$

$$\cos B = \frac{\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}h\right)^2 - (\sqrt{3}h)^2}{2 \times \frac{h}{\sqrt{3}} \times \frac{2\sqrt{6}}{3}h} = 0 \Leftrightarrow \angle B \text{ 為直角}$$

$\therefore \triangle AOB$ 的面積為

$$\frac{1}{2} \times \frac{h}{\sqrt{3}} \times \frac{2\sqrt{6}}{3}h = \frac{\sqrt{2}}{3}h^2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \times 150^2 = 7500\sqrt{2} \text{ 平方公尺}$$

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號

（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法清楚辨識，其後果由考生自行承擔。每一子題配分標於題末。

一、坐標平面上，由 A 、 B 、 C 、 D 四點所決定的「貝茲曲線」（Bézier curve）指的是次數不超過 3 的多項式函數，其圖形通過 A 、 D 兩點，且在點 A 的切線通過點 B ，在點 D 的切線通過點 C 。令 $y=f(x)$ 是由 $A(0, 0)$ 、 $B(1, 4)$ 、 $C(3, 2)$ 、 $D(4, 0)$ 四點所決定的「貝茲曲線」，試回答下列問題。

- (1) 設 $y=f(x)$ 的圖形在點 D 的切線方程式為 $y=ax+b$ ，其中 a, b 為實數。求 a, b 之值。（2 分）
- (2) 試證明多項式 $f(x)$ 可以被 x^2-4x 所整除。（2 分）
- (3) 試求 $f(x)$ 。（4 分）
- (4) 求定積分 $\int_2^6 |8f(x)|dx$ 之值。（4 分）

試題解析

答案 (1) $a = -2$, $b = 8$; (2) 略; (3) $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x$; (4) 56

命題出處 選修數學甲(下)第二章 多項式函數的微積分

測驗目標 微分公式、切線斜率、積分技巧

難易度 中偏難

詳解 (1) 過 D 之切線 L_2 的斜率 $m_2 = \frac{2-0}{3-4} = -2$

$$L_2: y - 0 = -2(x - 4) \Rightarrow y = -2x + 8$$

$$\therefore a = -2, b = 8$$

(2) $\because y = f(x)$ 的圖形通過 $A(0, 0)$, $D(4, 0)$
兩點

$$\therefore f(x) \text{ 可被 } (x-0)(x-4) = x^2 - 4x \text{ 整除}$$

(3) 設 $f(x) = (x^2 - 4x)(px + q)$

$$\Rightarrow f'(x) = (2x - 4)(px + q) + p(x^2 - 4x)$$

$$\therefore \text{過 } A(0, 0) \text{ 之切線 } L_1 \text{ 的斜率 } m_1 = \frac{4-0}{1-0} = 4$$

$$\therefore f'(0) = 4 \Rightarrow -4q = 4 \Rightarrow q = -1$$

$$\therefore \text{過 } D(4, 0) \text{ 之切線 } L_2 \text{ 的斜率 } m_2 = -2$$

$$\therefore f'(4) = -2 \Rightarrow 4 \cdot (4p - 1) = -2 \Rightarrow p = \frac{1}{8}$$

$$\text{代回 } f(x) = (x^2 - 4x) \left(\frac{1}{8}x - 1 \right) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x$$

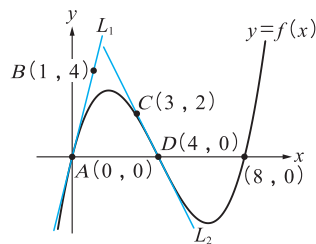
(4) $8f(x) = x^3 - 12x^2 + 32x$

$$\int_2^6 |8f(x)| dx = \int_2^6 |x^3 - 12x^2 + 32x| dx$$

$$= \int_2^4 (x^3 - 12x^2 + 32x) dx - \int_4^6 (x^3 - 12x^2 + 32x) dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + 16x^2 \right) \Big|_2^4 - \left(\frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + 16x^2 \right) \Big|_4^6$$

$$= (64 - 36) - (36 - 64) = 56$$



二、一個邊長為 1 的正立方體 $ABCD-EFGH$ ，點 P 為稜邊 $\overline{CG}$ 的中點，點 Q 、 R 分別在稜邊 $\overline{BF}$ 、 $\overline{DH}$ 上，且 A, Q, P, R 為一平行四邊形的四個頂點，如右圖所示。

今設定坐標系，使得 D 、 A 、 C 、 H 的坐標分別為

$(0, 0, 0)$ 、 $(1, 0, 0)$ 、 $(0, 1, 0)$ 、 $(0, 0, 1)$ ，

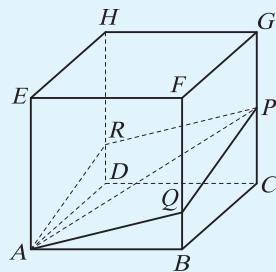
且 $\overline{BQ} = t$ ，試回答下列問題。

(1) 試求點 P 的坐標。(2 分)

(2) 試求向量 $\overrightarrow{AR}$ (以 t 的式子來表示)。(2 分)

(3) 試證明四角錐 $G-AQPR$ 的體積是一個定值 (與 t 無關)，並求此定值。(4 分)

(4) 當 $t = \frac{1}{4}$ 時，求點 G 到平行四邊形 $AQPR$ 所在平面的距離。(4 分)



答案 (1) $P\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$; (2) $\left(-1, 0, \frac{1}{2}-t\right)$; (3) 證明略, $\frac{1}{6}$; (4) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

命題出處 第四冊第一章 空間向量、第四冊第二章 空間中的平面與直線

測驗目標 立體圖形、三角形面積公式、平面方程式、點到平面的距離公式

難易度 難

詳解 先將正立方體坐標化，如右圖

(1) $\because P$ 為 $\overline{CG}$ 的中點 $\therefore P\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$

(2) 平行四邊形 $AQPR$ 中，

$$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{QP} = \left(-1, 0, \frac{1}{2}-t\right)$$

(3) 四角錐 $G-AQPR$ 的體積

$$= (A-GPQ \text{ 的體積}) + (A-GPR \text{ 的體積})$$

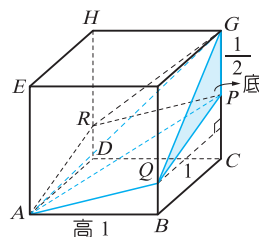
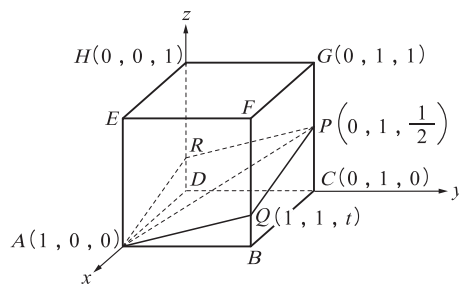
三角錐 $A-GPQ$ 的體積

$$= \frac{1}{3} \times \triangle GPQ \text{ 面積} \times (\text{高 } \overline{AB})$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1\right) \times 1 = \frac{1}{12}$$

相同方法，三角錐 $A-GPR$ 的體積同樣為 $\frac{1}{12}$

則四角錐 $G-AQPR$ 的體積 $= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$ 為一個定值



$$(4) \text{ 當 } t = \frac{1}{4} \text{ 時, } \overrightarrow{AR} = \left(-1, 0, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \left(-1, 0, \frac{1}{4}\right)$$

平面 $AQPR$ 之 x 、 z 截距各為 1 、 $\frac{1}{4}$

$$\therefore \text{設平面 } AQPR: \frac{x}{1} + \frac{y}{b} + \frac{z}{\frac{1}{4}} = 1 \Leftrightarrow x + \frac{y}{b} + 4z = 1$$

$$\text{將 } P\left(0, 1, \frac{1}{2}\right) \text{ 代入 } \Leftrightarrow \frac{1}{b} + 2 = 1 \Leftrightarrow b = -1$$

$$\text{代回平面 } AQPR: x - y + 4z - 1 = 0$$

$$\text{故 } d(G, \text{平面 } AQPR) = \frac{|0 - 1 + 4 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

〈另解一〉

平面 $AQPR$ 之法向量

$$= \overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AQ}$$

$$= \left(-1, 1, \frac{1}{2}\right) \times \left(0, 1, \frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1\right) \parallel (1, -1, 4)$$

$$\therefore \text{平面 } AQPR: x - y + 4z \stackrel{(1, 0, 0)}{=} 1$$

$$\text{故 } d(G, \text{平面 } AQPR) = \frac{|0 - 1 + 4 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

〈另解二〉

$\triangle APQ$ 的面積為

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AQ}| &= \frac{1}{2} \left| \left(-1, 1, \frac{1}{2}\right) \times \left(0, 1, \frac{1}{4}\right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1\right) \right| = \frac{3\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{三角錐 } A-GPQ \text{ 的體積為 } \frac{1}{3} \times \triangle APQ \text{ 面積} \times d(G, \text{平面 } AQPR)$$

$$\therefore \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{8} \times d(G, \text{平面 } AQPR)$$

$$\Leftrightarrow d(G, \text{平面 } AQPR) = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

