

101 指考

精彩解析

數學考科

斗六高中 / 李隆振 老師

【試題·答案】依據大考中心公布內容

發行人 / 陳炳亨
總召集 / 周耀琨
總編輯 / 蔣海燕
主編 / 陳俊龍
校對 / 黃閔謙
美編 / 張淳惠·鍾佩娟

出版 / 民國一〇一年七月
發行所 / 710248 臺南市新樂路 76 號
編輯部 / 710252 臺南市新忠路 8-1 號
電話 / (06) 2619621#314
E-mail / periodical@hanlin.com.tw
翰林我的網 <http://www.worldone.com.tw>

NO.00843



4 1716413 008439

23

本書內容同步刊載於翰林我的網



翰林出版



一 前言

101 年指考數學甲，是 95 課綱實施以來的末代試題，明年將由 99 課綱取代。但因為不同課綱下的數學科課程內容其實大同小異，差別只在於順序的調整，所以雖然明年課綱改變，但今年的命題走向仍值得做為未來的參考。

今年 3 月，筆者在翰林出版社所出版的「101 指定科目考試趨勢分析」一文中，提出 5 個今年考生必須注意的重點，其中：

1. 空間概念是數甲考生需具備的重要能力，命題的可能性很高。
2. 一階導函數和二階導函數圖形的判讀一定要加強，是命題的熱點。
3. 對數的計算題要注意。

以上三點在今年的數甲考題都有出現，相信未來的考試它們仍然是命題的重點。



二 試題分析

1 各單元的配分比例

| 單元名稱 | 題數與配分 | 總計 | 比例 |
|----------------|-----------------------------|----|---------------------|
| 1. 指數與對數 | 單選 3. (6 分) | 6 | 56% (一~四冊) |
| 2. 三角函數 | 多選 6. (8 分) 非選擇題二 (12 分) | 20 | |
| 3. 向量 | 多選 7. (8 分) | 8 | |
| 4. 空間中的直線與平面 | 多選 9. (8 分) | 22 | |
| | 選填 A. (7 分) | | |
| | 選填 B. (7 分) | | |
| 5. 機率與統計(II) | 單選 2. (6 分) | 6 | 44% (選修(I)、(II)) |
| 6. 矩陣 | 單選 4. (6 分) | 6 | |
| 7. 不等式 | 單選 5. (6 分) | 6 | |
| 8. 多項式函數的極限與導數 | 非選擇題一 (7 分) | 7 | |
| 9. 導函數的應用 | 多選 8. (8 分) | 8 | |
| 10. 多項式函數的積分 | 單選 1. (6 分) | 11 | |
| | 非選擇題一 (5 分) | | |

2 試題特色

1. 今年一～四冊所占的比重超過選修(I)、(II)，在過去的考試中是非常罕見的情形。
2. 今年的單選題全部是簡易題，對於程度中等的同學而言，這些問題都應該可以過關。對於程度好的同學而言，有些題目甚至可以「秒殺」。例如單選 1，筆者雖然寫了好幾行的詳解，其實明眼人皆知，10 秒內可知答案！單選 2 和單選 4 亦有類似情形。
3. 難題不多！真正的難題是多選第 9 題。有些專家說：『閱讀空間圖形的能力是天生的』如果此說屬實，則空間能力強的同學將在這個題目占盡優勢！而空間能力弱的同學則如坐困愁城，不知從何開始。但如果能靜下心來，其實還是有明顯的線索可尋，如共同稜線為 \overline{BC} ， \overline{BD} 和 \overline{AC} 相交， \overline{BG} 和 \overline{FC} 相交，就可以看出 Ω 的形狀了。
4. 另外被筆者列入難題的是非選擇題第二題。其實這題要稱為難題有點勉強，因為這種題目在考前應該演練多遍了，那為什麼筆者將它列入難題呢？原因是這個题目的第(2)小題必須用到第(1)小題的答案，而第(3)小題又必須用到第(2)小題的答案，環環相扣。不小心的同學將會連 3 錯，12 分沒了（如果部份給分另當別論），實在傷很大。
5. 多選 7 可能會是部份努力讀書同學的扼腕題。對部份同學而言，這個題目至少有以下 2 個麻煩之處：
 - (1) 共有 6 個點，其中 3 個的位置不是很確定。
 - (2) 想要用畫圖的方式處理 $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ，然後就隨便畫。

筆者的經驗發現，大部份同學都讀過重心的向量性質，但其實都不熟，更何況要在考試時應用自如。所以當同學走出考場後會扼腕的說：『就是重心性質，怎麼沒有想到呢？』但為時晚矣。

3 結 論

筆者認為，一份好的試題，至少要符合以下三個條件：

1. 第一要能夠測驗學生的基本數學知識（解方程式、平面與空間的幾何概念、能建立數學模型）。
2. 要能夠鼓舞學生在考試與學習時進行較深入的思考。
3. 要有足夠的鑑別度，能夠把中等的學生與程度較好的學生分出來，並且使優異的學生能脫穎而出。

據此，今年的數學甲考題尚可稱為好的試題，如果能適度增加單選題的難度，則今年的試題就更有鑑別度了。





第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 令 $f(x) = x(x-1)(x^3-2)$ ，試問有多少個實數 a 滿足 $\int_0^a f'(x) dx = 0$ ？

- (1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 5 個

答案 (3)

命題出處 選修數學(II)第三章 多項式函數的積分

測驗目標 定積分的基本概念

詳解 $\int_0^a f'(x) dx = f(x) \Big|_0^a = f(a) - f(0) = a(a-1)(a^3-2) = 0$

因為 $y = x^3 - 2$ 的圖形和 x 軸只有 1 個交點，所以 $x^3 - 2 = 0$ 只有 1 個實根，因此有 3 個實數 a 滿足 $a(a-1)(a^3-2) = 0$ ，
即 $a = 0, 1, \sqrt[3]{2}$

難易度 易

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 153 頁範例 6。

《指考關鍵 60 天·數學甲》第 153 頁範例 1。

2. 某公司員工中有 15% 為行政人員，35% 為技術人員，50% 為研發人員。這些員工中，60% 的行政人員有大學文憑，40% 的技術人員有大學文憑，80% 的研發人員有大學文憑。從有大學文憑的員工中隨機抽選一人，他(或她)是技術人員的機率是下列哪一個選項？

- (1) $\frac{2}{9}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{4}{9}$ (4) $\frac{1}{5}$ (5) $\frac{2}{5}$

答案 (1)

命題出處 選修數學(I)第一章 機率與統計(II)

測驗目標 條件機率

詳解 設 A 表示有大學文憑的事件， B 表示技術人員的事件

$$\text{則 } P(A) = \frac{15}{100} \cdot \frac{60}{100} + \frac{35}{100} \cdot \frac{40}{100} + \frac{50}{100} \cdot \frac{80}{100} = \frac{63}{100}$$



$$\text{題意所求 } P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{35}{100} \cdot \frac{40}{100}}{\frac{63}{100}} = \frac{14}{63} = \frac{2}{9}$$

難易度 易

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 63 頁範例 3。
《指考關鍵 60 天·數學甲》第 77 頁第 5 題。

3. 作某項科學實驗共有三種可能結果 A 、 B 、 C ，其發生的機率分別為 $p_A = \log_2 a$ 、 $p_B = \log_4 a$ 、 $p_C = \log_8 a$ ；其中 a 為一正實數。試問 p_A 為下列哪一個選項？

- (1) $\frac{5}{9}$ (2) $\frac{6}{11}$ (3) $\frac{7}{13}$ (4) $\frac{8}{15}$ (5) $\frac{9}{17}$

答案 (2)

命題出處 第二冊第一章 指數與對數

測驗目標 對數律的運算，並配合機率的基本概念

詳解 $p_A + p_B + p_C = 1 \Rightarrow \log_2 a + \log_4 a + \log_8 a = 1$

$$\Rightarrow \log_2 a + \frac{1}{2} \log_2 a + \frac{1}{3} \log_2 a = 1 \Rightarrow 6 \log_2 a + 3 \log_4 a + 2 \log_8 a = 6$$

$$\Rightarrow \log_2 a = \frac{6}{11}, \text{ 即 } p_A = \frac{6}{11}$$

難易度 易

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 5 頁範例 2。

4. 已知方陣 $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{bmatrix}$ 。試問下列哪一個選項為

$\begin{bmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ 的反方陣？

(1) $\begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} a' & d' & g' \\ b' & e' & h' \\ c' & f' & i' \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} g' & h' & i' \\ a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} g' & a' & d' \\ h' & b' & e' \\ i' & c' & f' \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} c' & a' & b' \\ f' & d' & e' \\ i' & g' & h' \end{bmatrix}$

答案 (5)



命題出處 選修數學(I)第二章 矩陣

測驗目標 矩陣的乘法和反方陣的基本概念

詳 解

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} aa'+bd'+cg'=1 \\ db'+ee'+fh'=1 \\ gc'+hf'+ii'=1 \end{cases}$$

題意問 $\begin{bmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

由矩陣的乘法規則可觀察得知 $\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c' & a' & b' \\ f' & d' & e' \\ i' & g' & h' \end{bmatrix}$

難易度 易

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 92 頁範例 10。

5. 當 (x, y) 在直線 $2x+y=3$ 上變動時，關於 $K=9^x+3^y$ 的敘述，試問下列哪一個選項是正確的？

- (1) K 有最大值 28、最小值 $6\sqrt{3}$
- (2) K 有最大值 28、但沒有最小值
- (3) K 沒有最大值、但有最小值 12
- (4) K 沒有最大值、但有最小值 $6\sqrt{3}$
- (5) K 沒有最大值也沒有最小值

答 案 (4)

命題出處 選修數學(I)第三章 不等式

測驗目標 算幾不等式

詳 解 $k=9^x+3^y=3^{2x}+3^y \geq 2\sqrt{3^{2x} \cdot 3^y} = 2\sqrt{3^{2x+y}} = 2\sqrt{3^3} = 6\sqrt{3}$

難易度 易

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 99 頁範例 1。

《指考關鍵 60 天·數學甲》第 199 頁第 9 題。

二、多選題 (占 32 分)

說明：第 6 題至第 9 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。



6. 設 $0 \leq \theta < 2\pi$ ，且方程式 $x^2 - a = 0$ 之兩根恰為 $\sin \theta$ 與 $\cos \theta$ 。請選出正確的選項。

(1) $\tan \theta = 1$

(2) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

(3) $\sin 2\theta = -1$

(4) $a = \frac{1}{2}$

(5) 滿足題設的 θ 只有一個

答案 (2)(3)(4)

命題出處 第二冊第三章 三角函數的性質與應用

測驗目標 三角公式、正餘弦函數的疊合、並配合根與係數的關係

詳解 由根與係數的關係知：
$$\begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = 0 \\ \sin \theta \cdot \cos \theta = -a \end{cases}$$

(1) $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -1$

(2) $\sin \theta + \cos \theta = 0 \Rightarrow \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \right) = 0$
 $\Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

(3) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow (\sin \theta + \cos \theta)^2 - 2 \sin \theta \cos \theta = 1$
 $\Rightarrow 0^2 - 2 \cdot (-a) = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$
 且 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = -2a = -1$

(4) 由(3)知 $a = \frac{1}{2}$

(5) 由(1)知 $\tan \theta = -1 \quad \therefore \theta = \frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{7\pi}{4}$

難易度 中

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 21 頁範例 4。

7. 平面上有一 $\triangle ABC$ ， G 為 $\triangle ABC$ 的重心。 O ， D 為此平面上的相異二點，且滿足 $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ 。請選出正確的選項。

(1) O ， G ， D 三點共線

(2) $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OG}$

(3) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{OD}$

(4) G 位於 $\triangle ABC$ 的內部

(5) D 位於 $\triangle ABC$ 的外部



答案 (1)(3)(4)

命題出處 第三冊第一章 向量

測驗目標 向量概念、重心的向量性質

詳解 (1) 由重心性質知： $\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$

$$\therefore \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}, \text{ 因此 } \vec{OD} = 3\vec{OG}$$

$\therefore O, G, D$ 三點共線

(2) $\vec{OD} = 3\vec{OG}$

(3) $\therefore \vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC} = 3\vec{DG}$

$$\therefore \vec{AD} + \vec{BD} + \vec{CD} = 3\vec{GD} = 3(\vec{OD} - \vec{OG}) = 3\left(\vec{OD} - \frac{1}{3}\vec{OD}\right) = 2\vec{OD}$$

(4) 重心在 $\triangle ABC$ 的內部

(5) 當 O 為外心， D 為垂心時，滿足 $\vec{OD} = 3\vec{OG}$ ，此時 D 在 $\triangle ABC$ 的內部；又如果 O 為 \overline{AB} 的中點，則 D 點與 C 點重合，所以 D 不一定在 $\triangle ABC$ 的外部。

難易度 中

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 33 頁範例 1。

8. 已知一個 n 次實係數多項式 $f(x)$ 滿足下列性質：

當 $x < 0$ 時， $f'(x) < 0$ 且 $f''(x) > 0$ ；

當 $0 < x < 1$ 時， $f'(x) < 0$ 且 $f''(x) < 0$ ；

當 $1 < x < 4$ 時， $f'(x) < 0$ 且 $f''(x) > 0$ ；

當 $x > 4$ 時， $f'(x) > 0$ 且 $f''(x) > 0$ 。

請選出正確的選項。

(1) $f'(2) > f'(3)$

(2) $f(x)$ 在 $x=4$ 時有最小值

(3) $f(x)$ 的圖形只有一個反曲點

(4) n 可能為 3

(5) $f(x)$ 的最高次項係數必為正

答案 (2)(5)

命題出處 選修數學(II)第二章 導函數的應用

測驗目標 一階、二階導函數的性質

詳解 (1) $\because 1 < x < 4$ 時， $f'(x) < 0$ $\therefore f(x)$ 為遞減函數，故 $f'(2) < f'(3)$

(2) $f'(4^-) < 0$ 且 $f'(4^+) > 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $x=4$ 時有最小值

(3) $f(x)$ 在 $x=0, 1$ 時為反曲點

(4) 三次函數圖形不會有 2 個反曲點

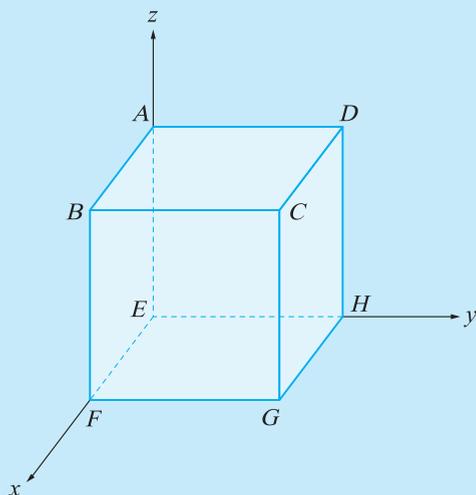
(5) $\because x > 4$ 時, $f'(x) > 0$ 且 $f''(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 遞增且凹口向上, 由圖形趨勢知 $f(x)$ 的最高次項係數必為正。

難易度 中

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 133 頁範例 2。

《指考關鍵 60 天·數學甲》第 136 頁範例 2。

9. 如圖所示, 正立方體的邊長為 2, 其中點 E 為原點, 點 F 、點 H 、點 A 的坐標分別為 $(2, 0, 0)$ 、 $(0, 2, 0)$ 、 $(0, 0, 2)$ 。令 Ω 表示四面體 $CBGD$ 與四面體 $BAFC$ 相交所形成的四面體。請選出正確的選項。



- (1) Ω 有一頂點坐標為 $(1, 1, 2)$
- (2) Ω 有一稜線其方向向量為 $(1, 0, -1)$
- (3) Ω 有兩個側面互相垂直
- (4) Ω 僅有一個側面是正三角形
- (5) Ω 的體積為 $\frac{2}{3}$

(註：四面體的體積為 $\frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高}$)

答案 (1)(2)(3)

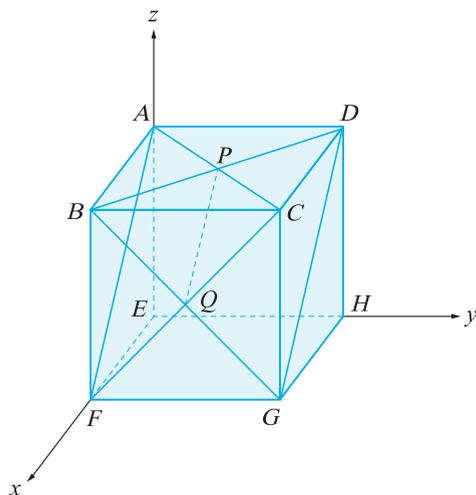
命題出處 第三冊第二章 空間中的直線與平面

測驗目標 觀察空間圖形的能力

詳解 Ω 為四面體 $PBQC$, 如右圖,

其中 $P(1, 1, 2)$, $B(2, 0, 2)$, $Q(2, 1, 1)$, $C(2, 2, 2)$

- (1) $P(1, 1, 2)$
- (2) $\overrightarrow{PQ} = (1, 0, -1)$
- (3) 側面 PBC 和側面 QBC 互相垂直





(4) $\triangle PCQ$ 和 $\triangle PBQ$ 為正三角形

(5) Ω 的體積 $= \frac{1}{3} \cdot (\triangle BPC) \cdot \text{高} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \right) \cdot 1 = \frac{1}{3}$

難易度 難

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 41 頁範例 1&2。

三、選填題 (占 14 分)

說明：1. 第 A 題與第 B 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(10~15)。
2. 每題完全答對給 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設 a, b, c, d, e 為實數。已知一次方程組 $\begin{cases} ax+3y+5z=b \\ y+cz=0 \\ 2y+dz=e \end{cases}$ 的解的圖形是坐標

空間中包含 x 軸的一個平面，則 $a = \textcircled{10}$ ， $b = \textcircled{11}$ ， $c = \frac{\textcircled{12}}{\textcircled{13}}$ 。(化成最簡分數)

答案 $\textcircled{10} 0$ $\textcircled{11} 0$ $\textcircled{12} 5$ $\textcircled{13} 3$

命題出處 第三冊第二章 空間中的直線與平面

測驗目標 一次方程組

詳解 因為 x 軸為其解，所以將 $(0, 0, 0)$ ， $(1, 0, 0)$ 代入方程組可得 $a=b=e=0$

$$\text{此時方程組變成} \begin{cases} 3y+5z=0 \cdots \textcircled{1} \\ y+cz=0 \cdots \textcircled{2} \\ 2y+dz=0 \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 3 \text{ 得 } (5-3c)z=0, \text{ 取 } c = \frac{5}{3}$$

難易度 易

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 96 頁全國模擬考試題觀摩。

B. 空間中，以 \overline{AB} 為共同邊的兩正方形 $ABCD$ 、 $ABEF$ ，其邊長皆為 4。已知內積 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AF} = 11$ ，則 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = \textcircled{14}\textcircled{15}$

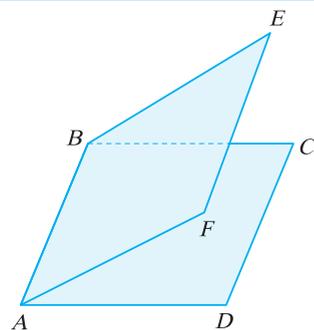
答案 $\textcircled{14} 2$ $\textcircled{15} 7$

命題出處 第三冊第二章 空間中的直線與平面

測驗目標 空間向量的內積

詳解 圖形如右，

$$\begin{aligned} \because \overrightarrow{FE} \parallel \overrightarrow{AB} \text{ 且 } \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB} \quad \therefore \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{FE} \\ \text{同理 } \overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{AF} \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}\vec{AC} \cdot \vec{AE} &= (\vec{AD} + \vec{DC}) \cdot (\vec{AF} + \vec{FE}) \\ &= \vec{AD} \cdot \vec{AF} + \vec{AD} \cdot \vec{FE} + \vec{DC} \cdot \vec{AF} + \vec{DC} \cdot \vec{FE} \\ &= 11 + 0 + 0 + 4 \cdot 4 \cdot \cos 0^\circ = 27\end{aligned}$$

難易度 中

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 41 頁範例 1。
《指考關鍵 60 天·數學甲》第 54 頁第 6 題。

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、(3)），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至給零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、設 f 為一實係數多項式函數。

- (1) 設 $\langle a_n \rangle$ 為一數列，其中 $a_n = \frac{f(n)}{n^4}$ 。若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$ ，試求 f 的次數與最高次項係數。（3 分）
- (2) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$ ，試求 f 的函數圖形在 $x=0$ 時的切線方程式。（4 分）
- (3) 若 f 滿足上面(1)與(2)的假設，且 $f''(0) = 2$ ，試求 $\int_{-1}^1 f(x) dx$ 之值。（5 分）

答案 (1) 4 次且最高次項係數為 5

(2) $y = 3x$

(3) $\frac{8}{3}$

命題出處 選修數學(II) 多項式函數的極限與導數

測驗目標 極限、切線方程式、定積分的計算

詳解 (1) 因為 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^4} = 5$ ，所以 $f(n)$ 必為 4 次

$$\text{設 } f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$\text{則 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e}{n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \frac{e}{n^4} \right) = a = 5$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(5x^3 + bx^2 + cx + d + \frac{e}{x} \right) = 3$$

$$\Rightarrow d = 3 \text{ 且 } e = 0$$

$$\therefore f(x) = 5x^4 + bx^3 + cx^2 + 3x$$

$$f'(x) = 20x^3 + 3bx^2 + 2cx + 3 \Rightarrow f'(0) = 3$$

$$\therefore f(x) \text{ 通過 } (0, 0) \therefore \text{切線方程式為 } y = 3x$$



$$(3) f''(x) = 60x^2 + 6bx + 2c, \text{ 又 } f''(0) = 2c = 2 \Rightarrow c = 1$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (5x^4 + bx^3 + x^2 + 3x) dx \\ &= \left(x^5 + \frac{b}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \left(1 + \frac{b}{4} + \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \right) - \left(-1 + \frac{b}{4} - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \right) = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

難易度 中

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 118 頁範例 5，第 125 頁範例 5，第 152 頁範例 5。

《指考關鍵 60 天·數學甲》第 194 頁第 7 題。

二、在 $\triangle ABC$ 中， D 為 \overline{BC} 邊上一點且 \overline{AD} 平分 $\angle BAC$ 。已知 $\overline{BD} = 5$ ， $\overline{DC} = 7$ ，且 $\angle ABC = 60^\circ$ 。

- (1) 試求 $\sin \angle ACB$ 之值。(4 分)
- (2) 試求 $\sin \angle BAC$ 之值。(4 分)
- (3) 試求 \overline{AB} 邊之長。(4 分)

答案 (1) $\frac{5\sqrt{3}}{14}$

(2) $\frac{4\sqrt{3}}{7}$

(3) $\frac{15}{2}$

命題出處 第二冊 三角函數的基本概念、性質與應用

測驗目標 正弦定律、和角公式

詳解 (1) 根據正弦定律，

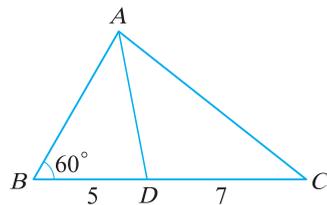
$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 中，} \frac{5}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{\overline{AD}}{\sin 60^\circ} \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{在 } \triangle ACD \text{ 中，} \frac{7}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{\overline{AD}}{\sin \angle ACB} \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{由 } \frac{\textcircled{1}}{\textcircled{2}} \text{ 得 } \frac{5}{7} = \frac{\sin \angle ACB}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \sin \angle ACB = \frac{5}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$(2) \sin \angle BAC = \sin(180^\circ - (B + C)) = \sin(B + C)$$

$$= \sin B \cos C + \cos B \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{11}{14} + \frac{1}{2} \times \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$





(3) 根據正弦定律，

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\angle ACB} = \frac{\overline{BC}}{\sin\angle BAC} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\frac{5\sqrt{3}}{14}} = \frac{12}{\frac{4\sqrt{3}}{7}} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{15}{2}$$

難易度 難

類似題 《大滿貫復習講義·數學甲》第 19 頁範例 2。
《指考關鍵 60 天·數學甲》第 187 頁第 8 題。

