



從數學非選擇題來 分享數學教學策略

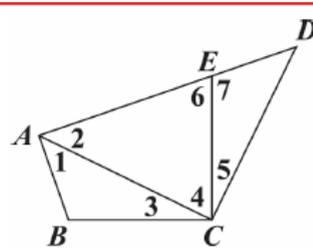
國中數學老師 Math coffee

為什麼要考非選擇題？

這個問題本身就是一個不太正確的敘述。因為數學的學習原本就是過程略重於結果。我們來看看會考的依據，也就是課綱是怎麼說的。在課綱中提到，數學的溝通能力溝通包括理解與表達兩種能力，所以，數學溝通一方面要能瞭解別人以書寫、圖形，或口語中所傳遞的數學資訊；另一方面，也要能以書寫、圖形，或口語的形式，運用精確的數學語言表達自己的意思。基於此，能表達出適切的過程原本就是數學重要的任務。事實上，負責命題的心測中心一直以來從未停過對數學非選擇題的研究與準備，只是基於評分的技術等等相關設備的籌措，需要完善的準備。

非選擇題長怎樣？

如圖(十四)，四邊形 $ABCD$ 中， E 點在 \overline{AD} 上，其中 $\angle BAE = \angle BCE = \angle ACD = 90^\circ$ ，且 $\overline{BC} = \overline{CE}$ 。請完整說明為何 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEC$ 全等的理由。



圖(十四)

上圖是 103 年 5 月會考非選擇題第 2 題，它是一道幾何說明題，我們從題目中的最後一句，可以知道，這是一題要求學生說明兩個三角形（ $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEC$ ）全等的問題。學生應會立即搜尋腦中所記得的判斷兩三角形是否全等的性質，例如： ASA 、 SSS 等。但問題是，要利用哪一個全等性質呢？如果只是一股腦地背出所有的全等性質，然後胡亂選擇一個，或者是將邊看起來對應相等、角看起來也對應相等的條件全部列出來，這樣最多就是得到 1 分。如此，甚至有可能選錯了全等性質，例如： SSA ，有時會不自知，那就更糟糕了（0 分）。

像這樣的一道問題，如果換成選擇題題型，**選項往往就是上述的全等性質**，然後問是根據哪一個。這樣的命題不但無法確知學生的狀況或盲點，甚至會形成爭議題。因為，判斷兩個三角形是否全等，並沒有一定是利用哪一個全等性質。例如：下圖中，**左邊的學生**是利用 ASA，而**右邊的學生**是利用 AAS，兩個人都得到滿分（3 分）。

$$\overline{BC} = \overline{CE}$$

$$\angle 4 + \angle 5 = 90^\circ$$

$$\angle 4 + \angle 3 = 90^\circ$$

$$\angle 3 = \angle 5$$

$$\angle ACB = \angle DCE$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEC \text{ (ASA 全等)}$$

四邊形 ABCE 內角和: 360°

$$\angle ABC + \angle 6 = (360 - 180)^\circ$$

$$= 180^\circ$$

$$\angle 7 + \angle 6 = 180^\circ$$

$$\angle ABC = \angle 7$$

$$\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4 = \angle 4 + \angle 5 = 90^\circ$$

$$\angle 3 + \angle 4 = \angle 4 + \angle 5$$

$$\Rightarrow \angle 3 = \angle 5$$

$$\overline{BC} = \overline{CE}$$

$$\angle 2 + \angle D = 90^\circ = \angle 1 + \angle 2$$

$$\angle 2 + \angle D = \angle 1 + \angle 2$$

$$\Rightarrow \angle D = \angle 1$$

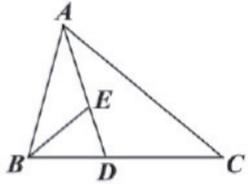
$$\triangle ABC \cong \triangle DEC \text{ (AAS 全等)}$$

作一些練習題是必要的

事實上，從歷屆基測題（雖然都是選擇題）或是會考、特招中的選擇題也是有很多適合用來練習非選擇題的。只要有解題過程與理由需要說明的，基本上都適合。例如：103 年 7 月的特招選擇第 26 題，如下：

26. 如圖(十二)， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 兩點分別在 \overline{BC} 、 \overline{AD} 上，且 \overline{AD} 為 $\angle BAC$ 的角平分線。若 $\angle ABE = \angle C$ ， $\overline{AE} : \overline{ED} = 2 : 1$ ，則 $\triangle BDE$ 與 $\triangle ABC$ 的面積比為何？

(A) 1 : 6
(B) 1 : 9
(C) 2 : 13
(D) 2 : 15



圖(十二)

非選擇題概覽

分析 102 年 3 月試辦會考、103 年 5 月會考以及 103 年 7 月的特招等 3 份試題，我們可歸納出下列結論，非選擇題通常考 2 題，第一題是情境應用題（文字應用題），第二題是幾何說明題，至於，未來是否會有第 3 題或是其他的出題手法，那就不得而知了。以下我們將 102 年試辦~103 年特招等 3 份試題中，共 6 題非選擇題，先作個簡要的分析。如果需要詳細的評分指引，可以依據附帶的網址下載。

| 題號 | 題目內容 | 答題時可能牽涉的知識與策略 |
|-----------|---------|---------------------------|
| 102—試—非 1 | 罐頭工廠 | 等差數列、不等式、臆測公差、代入檢驗、顧及上下範圍 |
| 102—試—非 2 | 面積一半 | 梯形面積替換、相似形比例線段 |
| 103—會—非 1 | 甲乙兩校 | 二元一次式的運算、推論說明、檢驗說明 |
| 103—會—非 2 | 說明全等 | 三角形的全等性質、湊齊條件的能力 |
| 103—特—非 1 | 巧克力 | ? 元 1 次方程式與不等式 |
| 103—特—非 2 | 竟有 2 小題 | 線對稱、三角形三邊的關係 |

102 試辦會考非選擇題評分指引下載網址：http://cap.ntnu.edu.tw/exam/102/1020419_math.pdf
 103 會考非選擇題評分指引下載網址：<http://cap.ntnu.edu.tw/writing/103math.pdf>
 103 特招非選擇題評分指引下載網址：[http://www.rcpet.ntnu.edu.tw/AATest/103AAT_MATH\(1030722\).pdf](http://www.rcpet.ntnu.edu.tw/AATest/103AAT_MATH(1030722).pdf)

該如何因應與準備呢？

小佳的老闆預計訂購 5 盒巧克力，每盒顆數皆相同，分給工作人員，預定每人分 15 顆，會剩餘 80 顆。後來因經費不足少訂了 2 盒，於是改成每人先分 12 顆，但巧克力仍不夠分，只有最後分到巧克力的小佳拿不到 12 顆，但她分到 3 顆以上(含 3 顆)。請問所有可能的工作人員人數為何？請完整寫出你的解題過程及所有可能的答案。

上圖是 103 年 7 月特招的非選擇題第 1 題，它是一道文字應用問題（情境題），我們可以預想當學生看到這一題的第一個感覺應該是，**题目的敘述怎麼這麼長？**我們可以如何引導學生，可以如何準備呢？

首先，我們可以先「考」自己，看看自己會如何解？看看自己在閱讀時，那邊有**卡住**的感覺，通常這種地方也會是學生容易卡住之處。我們可以試試引導學生**分段閱讀**並適度地不斷提示學生說，**題目給了什麼，題目要問什麼**。例如：上題中，可以這樣問學生。

師：題目說原本訂幾盒巧克力？（給了什麼？）

生：5 盒（可以請學生圈起來或指出來，如下圖）

小佳的老闆預計訂購 5 盒巧克力，每盒顆數皆相同，分給工作人員，預定每人分 15 顆，會剩餘 80 顆。後來因經費不足少訂了 2 盒，於是改成每人先分 12 顆，但巧克力仍不夠分，只有最後分到巧克力的小佳拿不到 12 顆，但她分到 3 顆以上(含 3 顆)。請問所有可能的工作人員人數為何？請完整寫出你的解題過程及所有可能的答案。

師：（接著問）那題目有給一盒幾顆巧克力嗎？

生：（尋找中…）沒有耶！只有給每盒的顆數均相同。

師：那知道每盒巧克力的顆數對解題有何幫助？

生：因為接下來有給這 5 盒怎麼分？

師：怎麼分？

生：若每人 15 顆，則會剩下 80 顆。

在這一階段，教師可以引導學生明白

假設每盒巧克力有 x 顆，可以得到 5 盒巧克力共 $5x$ 顆，

另一方面，假設工作人員有 y 人，可以得到 5 盒巧克力共 $(15y + 80)$ 顆，

因此， $5x = (15y + 80)$ 。

接下來，教師可以視情況，看是否要引導學生領悟：

知道 x 可以求出 y ，或是知道 y 可以求出 x ，所以，其實只需要一個未知數，或是先整理一下，得到 $x = (3y + 16)$ 。事實上，這樣的觀念，最慢到第 2 冊第 1 章二元一次方程式或是聯立方程式時，學生就應該要有機會領略到。

換句話說，接著，我們可以引導學生預測，接下來的題目內容，應該是在告訴我們什麼？沒錯，應該是給另外一個關於 x 與 y 的線索。這樣才能聯立，進而用來確認 x 與 y 的值嘛！

讓我們繼續看下去…

師：接下來，怎麼分？

生：還沒說，只說少訂 2 盒。

師：好，那是幾盒？

生：3 盒

師：那 3 盒共有幾顆巧克力？

生： $3x$ 顆

師：為何？

生：不是假設每盒巧克力有 x 顆嗎？

師：很好！

教師可以視情況，看是否要引導學生領悟：

其實也可以說，1 盒巧克力有 $(3y + 16)$ 顆，3 盒共有 $3(3y + 16)$ 顆

師：怎麼分？

生：若每人 12 顆，則最後 1 人（小佳）拿不到 12 顆。

師：那最後 1 人（小佳）是拿幾顆？

生：3 顆以上（含 3 顆），但不到 12 顆。

師：那你會怎麼列式呢？

也許是， $3x = 12(y - 1) + \text{小佳拿的顆數}$

也許是， $3(3y + 16) = 12(y - 1) + \text{小佳拿的顆數}$

不管怎樣，有注意到 $x = (3y + 16)$ 代入，或是直接只假設人數，然後表示出每盒巧克力數，是解這一題的關鍵之一。

至此，為了單純，僅就 $3(3y + 16) = 12(y - 1) + \text{小佳拿的顆數}$ ，這個式子來討論，

$\text{小佳拿的顆數} = 3(3y + 16) - 12(y - 1) = -3y + 60$

依據題意，小佳拿的顆數是 3 顆以上（含 3 顆），但不到 12 顆

可列出不等式， $3 \leq -3y + 60 < 12$ ，解得 $16 < y \leq 19$

最後，題目是問人數，所以本題答案可能為 17、18、19 人

文字題閱讀理解策略

在上面漫長的引導過程中，我們主要的目的是想整理出解文字題時，所需的讀懂題意的一些策略，例如：**提問**（題目給了什麼？）、**預測**（接下來，題目可能會給什麼？）、**反思**（我們可以少假設一個未知數嗎？）、**澄清與摘要**等。當然，我們在課程中所學到的「**設、列、解、驗、答**」，也是非常重要的。簡述如下：

設：依據題意，假設適當的未知數

列：依據題意，列出適當的算式、（聯立）方程式或不等式

解：解出上式

驗：視情境，檢驗答案的合理性

答：看清楚，題目要問什麼，然後寫答

同樣地，**適度地練習是重要的**，建議可以找出**103年特招選擇第8題**、**103年特招選擇第23題**、**102年試辦會考選擇第22題**、**103年會考選擇第22題**，作為練習題。

結語

會考試題的**命題是依據**97課程綱要，因此，解題時所需要的**知識範圍**一定是在課本的重點整理可以找得到，但**取材**不會侷限於課本內容，而**出題手法**也充滿著巧思，因此學生必須要養成**融會貫通與適量的練習**的學習習慣，同時培養自己跨章節的整合能力，追求一種**豁然開朗、淋漓盡致**的學習感受。

對於非選擇題，我們可以從心測中心所公佈的評分指引與學生作答樣卷中得知**如何才能得到滿分(3分)**。瞭解之後，可以設計、尋找或改編一些需要說明過程或理由的非選擇題，讓學生練習。我們可以仿照心測中心的作法，將學生的作答樣卷掃描，讓學生相互觀摩。看看自己為何沒有得3分的原因，又該如何精進呢？當然，我們也可以找一些有意願的夥伴一起做，這樣比較不會壓力那麼大，也比較不會孤單。正所謂「**一個人可以走得比較快，但是一群人可以走得比較久。**」**不管是，學生還是老師，都需要夥伴，如何做起呢？**

也許，您可以這樣做，在教學的過程中除了**適度地示範與講解**之外，也可以詢問學生**某步驟的理由**；有時不妨適度地**開放幾分鐘讓學生互相討論、分享或是提出問題**，也可有意識地進行課堂行間巡視，以作為**微調課堂節奏**的依據。